APPUNTI SULLE MATRICI

Giovanni Ferranti <gyofer@yahoo.it>

Dato un corpo numerico K, una matrice si presenta nel seguente modo:

$$\begin{matrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2m} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nm} \end{matrix} \qquad A(n, m)$$

Ci sono anche casi estremi, ossia matrici formate da una sola riga o da una sola colonna:

$$\begin{matrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1m} \end{matrix} \qquad A(1, m)$$

$$\begin{matrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \dots \\ a_{n1} \end{matrix} \qquad A(n, 1)$$

* * *

$A = B \Leftrightarrow \forall ij \;\; a_{ij} = b_{ij}$

A(n, m) + B(n, m) = C(n, m) dove $\forall ij \;\; c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$

k·A(n, m) = B(n, m) dove $b_{ij} = ka_{ij}$

* * *

A + B = B+ A; 1·A = A; (A + B)·k = k·A + k·B

* * *

TRASPOSTA DI UNA MATRICE

$A \Rightarrow A^t$ è quello che si ottiene scambiando le righe con le colonne, ovvero:

$$a_{ij}^t = a_{ji}$$

* * *

$$\left(A^t\right)^t = A$$
$$(A + B)^t = A^t + B^t$$

* * *

Se m = n la matrice si dice <u>quadrata</u>.

Una matrice del tipo $\begin{matrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{matrix}$ si chiama <u>matrice unità</u> e si indica con I o U.

* * *

Se si ha A(n, p) e B(p, n) si può definire un prodotto riga × colonna A·B = C

Allora $c_{ij} = \sum_{h=1}^{p} a_{ih} b_{hj}$

$$\text{Es: } \begin{matrix} 2 & 1 & 3 \\ 3 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{matrix} \bullet \begin{matrix} 3 & 0 \\ 2 & 1 \\ 3 & 1 \end{matrix} = \begin{matrix} 2\bullet 3+1\bullet 2+2\bullet 3 & 2\bullet 0+1\bullet 1+3\bullet 1 \\ 3\bullet 3+1\bullet 2+0\bullet 3 & 3\bullet 0+1\bullet 1+0\bullet 1 \\ 0\bullet 3+1\bullet 2+2\bullet 3 & 0\bullet 0+1\bullet 1+2\bullet 1 \end{matrix}$$

N.B. - $A \times B \neq B \times A$ ammesso che si possa fare. Infatti nell'esempio precedente non è possibile in quanto il numero di colonne non è uguale al numero di righe.

A(n, n) B(n, n); $AB \neq BA$

$$(AB)^t = B^t \cdot A^t$$

$$A(n, n)\cdot I = I\cdot A(n, n) = A$$

* * *

Data una matrice A(n, n) si chiama <u>matrice inversa</u> A^{-1} quella matrice tale che

$$A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = I$$

* * *

$$(A \cdot B)^{-1} = B^{-1} \cdot A^{-1}$$

* * *

Data una matrice A(n, n) ci si chiede se esiste l'<u>inversa</u> A^{-1} tale che $A\cdot A^{-1} = A^{-1}\cdot A = I$.
Data una matrice A si chiama <u>matrice aggiunta A^G</u> quella il cui elemento $a_{ij} = A_{ij}$, cioè quando i suoi elementi sono uguali ai complementi algebrici degli elementi stessi.

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{pmatrix}$$

Se si moltiplica la matrice A per la trasposta della matrice aggiunta si ha: $A\cdot A^{Gt}$

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{32} & A_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \det A & 0 & 0 \\ 0 & \det A & 0 \\ 0 & 0 & \det A \end{pmatrix}$$

allora

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{A_{11}}{\det A} & \frac{A_{21}}{\det A} & \frac{A_{31}}{\det A} \\ \frac{A_{12}}{\det A} & \frac{A_{22}}{\det A} & \frac{A_{32}}{\det A} \\ \frac{A_{13}}{\det A} & \frac{A_{23}}{\det A} & \frac{A_{33}}{\det A} \end{pmatrix}$$

$$A^{-1} = \frac{A^{Gt}}{\det A}$$

Allora una matrice è invertibile se e solo se $\det A \neq 0$.

DETERMINANTI

$$\begin{matrix} 2 & 3 \\ 1 & 4 \end{matrix} = 2\cdot 4 - 3\cdot 1 = 5$$

METODO DI SARRUS

Es: $\begin{matrix} 2 & 1 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & 1 & 3 & 1 \end{matrix}$ si aggiungono le prime due colonne

2 + 6 + 0 - 9 - 4 - 0 = -5

TEOREMI DI LAPLACE

$$\begin{matrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \end{matrix}$$ <u>Complemento algebrico</u> $A_{21} = (-1)^{2+1} \begin{matrix} a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{matrix}$

PRIMO TEOREMA DI LAPLACE

$$\sum_{h=1}^{n} a_{ih} A_{ih} = \det A \ \ \forall i$$

$$\sum_{h=1}^{n} a_{hj} A_{hj} = \det A \ \ \forall i$$

SECONDO TEOREMA DI LAPLACE

$$\sum_{h=1}^{n} a_{ih} A_{jh} = 0 \qquad i \neq j$$

JORDAN

$$\det A = \begin{array}{ccccc} a_{11} & a_{12} & \ldots & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & \ldots & a_{nn} \end{array} = \frac{1}{a_{11}^{n-1}} \begin{array}{c|cccc|} a_{11} & a_{12} & \ldots & \ldots & a_{1n} \\ \hline 0 & a_{21}a_{11} - a_{21}a_{12} & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \hline \end{array}$$

$$\frac{1}{a_{11}^{n-1}} \cdot a_{11} \cdot \ldots..$$

PROPRIETÁ FONDAMENTALI DEI DETERMINANTI

1) Un determinante non si altera scambiando nella matrice dei suoi elementi, le righe con le colonne.
   Conseguentemente ogni proprietà relativa alle righe di un determinante sussiste anche per le colonne, e viceversa.

2) Se in un determinante si scambiano fra di loro due righe (colonne), il determinante ottenuto è di segno contrario del primitivo.

3) Un determinante con due righe (colonne) uguali, è nullo.

4) Un determinante avente una riga (colonna) nulla, è uguale a zero.

5) Moltiplicando e dividendo una riga (colonna) per un numero k, il determinante viene moltiplicato o diviso per k.

Dalle 3) e 5), discende che:

6) Un determinante avente due righe (colonne) proporzionali, è uguale a zero.

7) Gli elementi di una riga (colonna) di un determinate sono polinomi di k termini, il determinante è uguale alla somma dei k determinanti che si ottengono sostituendo nel determinante dato, a ciascun polinomio, il suo 1°, 2°, 3°, ..., k^{mo} termine.

Dalle 6) e 7), segue che:

8) Un determinante non cambia se ad una riga (colonna) si aggiungono altre righe (colonne) moltiplicate per fattori arbitrari.

9) Un determinante in cui una riga (colonna) è una combinazione lineare di due, o più, altre righe (colonne), è uguale a zero.

RISOLUZIONE DI SISTEMI

$$\begin{cases} 2x - 3y + z = 1 \\ x + 2y - z = 0 \\ x + 3y + 2z = 2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2x - 3y + z = 1 \\ ***7y - 2z = -1 \\ ***9y + 3z = 3 \end{cases}$$

Forma Triangolare Superiore

$$\begin{cases} 2x - 3y + z = 1 \\ ***7y - 2z = -1 \\ *****39z = 30 \end{cases}$$

si procede poi per sostituzioni successive.
I sistemi possono avere n soluzioni, infinite soluzioni o risultare impossibili.

MATRICE ASSOCIATA AD UN'APPLICAZIONE LINEARE

Siano V, W spazi vettoriali. Sia $F: V \rightarrow W$ un'applicazione lineare di V in W. Si vedrà ora in che modo si può associare una matrice a F. <u>Una tale matrice dipenderà dalla scelta delle basi in V e W</u>.

Siano $\{v_1,\ldots,v_n\}$ e $\{w_1,\ldots,w_m\}$ rispetivamente basi di V e W. Ognuno degli elementi $F(v_1),\ldots,F(v_n)$ appartiene a W. Ognuno di essi, quindi, può essere scritto come combinazione lineare di $w_1,\ldots,w_m$. Cioè

$$F(v_1) = a_{11}w_1 + \ldots + a_{m1}w_m,$$
$$F(v_n) = a_{1n}w_1 + \ldots + a_{mn}w_m$$

I numeri a_{ij} così disposti

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1m} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{m2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

formano una matrice. La trasposta di questa matrice sarà chiamata la <u>matrice associata</u> all'applicazione lineare F (relativa alla nostra scelta delle basi).

Es: Sia F un'applicazione lineare tale che

$$F(v_1) = 3w_1 - w_2 + 17w_3$$

$$F(v_2) = w_1 + w_2 - w_3$$

Avendo assunto dimV = 2 e dimW = 3. Allora la matrice associata a F è

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 1 \\ 17 & -1 \end{pmatrix}$$

che è la trasposta della matrice $\begin{pmatrix} 3 & -1 & 17 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$.